Actividad 13

1) **a) Halle una expresión analítica para la función f(t) de la figura (a).**

b) En el circuito de la figura (b) halle ic(t) si la fuente de tensión v(t)=f(t)V. Exprese el resultado en forma gráfica y analítica.

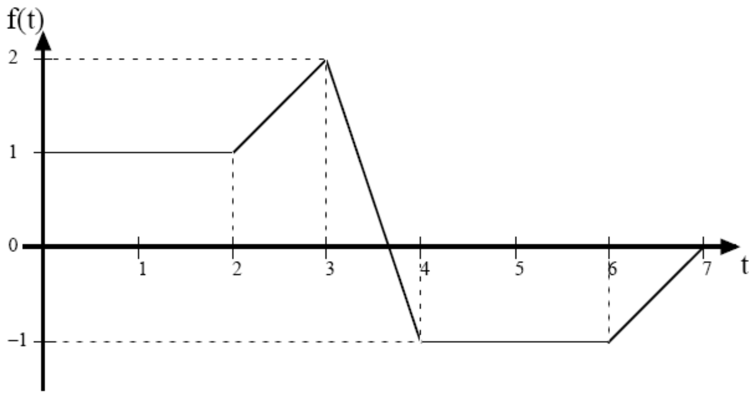


Figura (a)

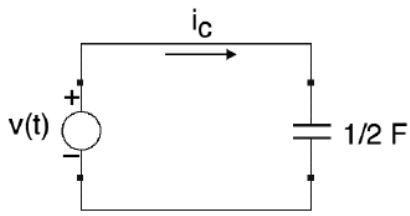


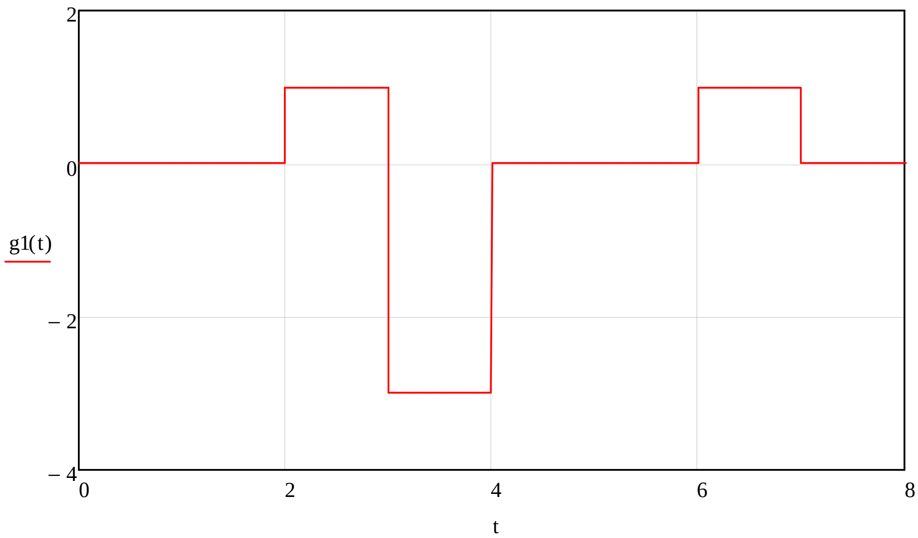
Figura (b)

a) Al determinar las ecuaciones de las rectas que conforman la gráfica, se obtiene que:

$$f(t)\begin{cases} 1 & 0 \le t < 2 \\ t-1 & 2 \le t < 3 \\ -3t+11 & 3 \le t < 4 \\ -1 & 4 \le t < 6 \\ t-7 & 6 \le t < 7 \end{cases}$$

b) $i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} = C\dfrac{df(t)}{dt}$

$$i_C(t)\begin{cases} 0 & 0 \le t < 2 \\ 1C & 2 \le t < 3 \\ -3C & 3 \le t < 4 \\ 0 & 4 \le t < 6 \\ 1C & 6 \le t < 7 \end{cases}$$



2) a) **Halle una expresión analítica para la función f(t) de la figura (a)**

b) En el circuito de la figura (b) halle la corriente i(t) si v(t)=f(t)V. Exprese el resultado en forma gráfica y analítica

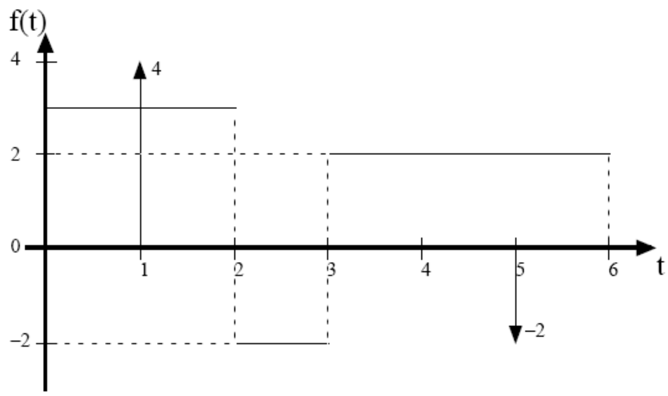


Figura (a)

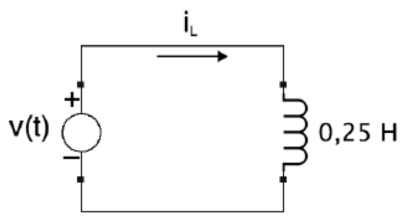


Figura (b)

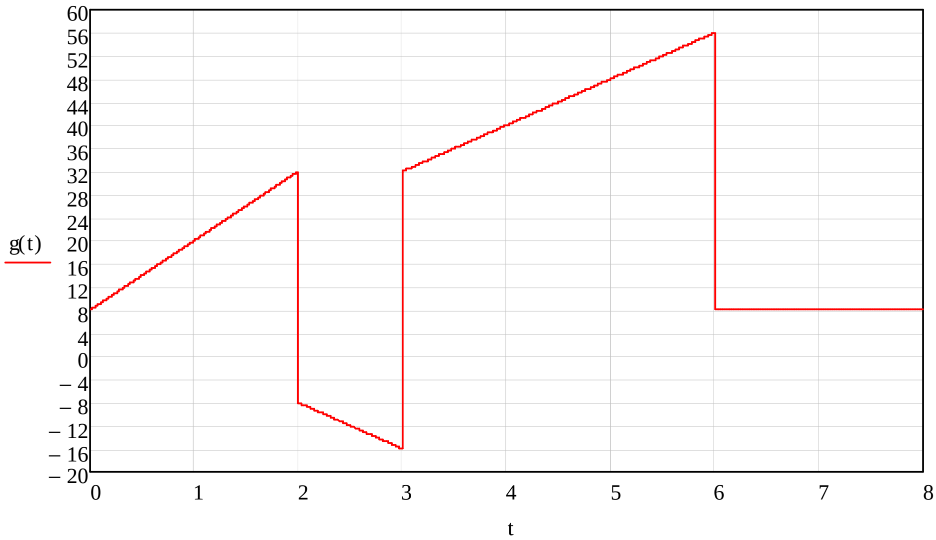
$$f(t)\begin{cases} 3 & 0 \le t < 2 \\ 4\delta(t-1) & t = 1 \\ -2 & 2 \le t < 3 \\ 2 & 3 \le t < 6 \\ -2\delta(t-5) & t = 5 \end{cases}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)\,d\tau + i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^t f(t)\,d\tau + i_L(0)$$

Tomado como condición inicial $i_L(0) = 0A$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t f(t)d\tau$$

$$i_L(t)\begin{cases} 12t+8 & 0 \le t < 2 \\ -8t+8 & 2 \le t < 3 \\ 8t+8 & 3 \le t < 6 \end{cases}$$

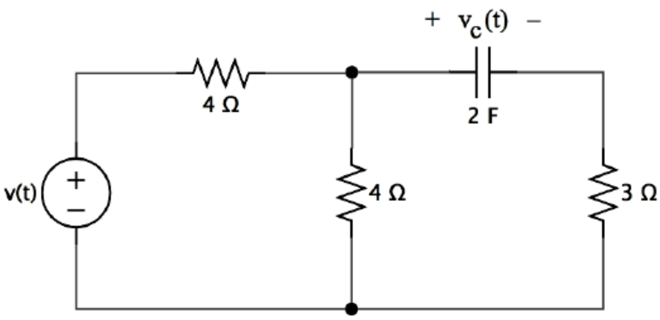


3) Halle la tensión vc(t) si vc(0-)=2V y

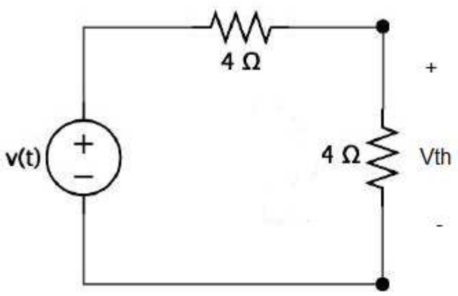
a) V(t)=4u(t)

b) V(t)=3rt

c) V(t)=2sen(2t)

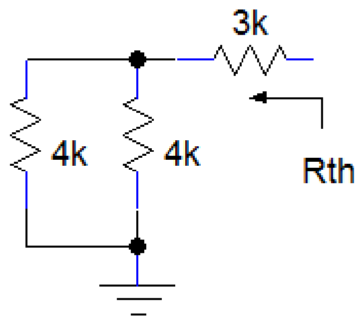


Buscando el equivalente de Thèvenin:



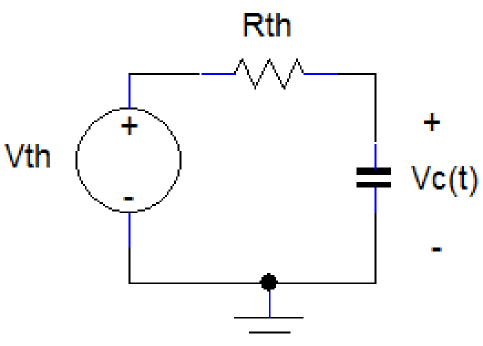
Por divisor de voltaje:

$$Vth = \frac{4v(t)}{8} = \frac{v(t)}{2} \qquad (1)$$



$$Rth = (4//4) + 3 = 5\Omega \qquad (2)$$

El circuito equivalente es:



Recorriendo la malla:

$$-V_{th} + R_{th} i_C(t) + v_C(t) = 0 \tag{3}$$

Pero se sabe que:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3) se obtiene que

$$-V_{th} + R_{th} C \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0 \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_{th}C} = \frac{V_{th}}{R_{th}C}$$

Así que:

$$K = \frac{V_{th}}{R_{th}C}$$

$$\tau = R_{th}C$$

Reescribiendo la ecuación se obtiene que:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{\tau} = K \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{K\tau - v_C(t)}{\tau}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_C(t)}{v_C(t) - K\tau} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int \frac{dv_C(t)}{(v_C(t) - K\tau)} = \int -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln(v_C(t) - K\tau) = \frac{-t}{\tau} + B$$

$$\Rightarrow v_C(t) - K\tau = e^{-t/\tau} e^B$$

$$A = e^B$$

$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + K\tau \tag{5}$$

Buscando el valor de la constante A:

$$v_C(0) = Ae^0 + K\tau \Rightarrow A = v_C(0) - K\tau$$

Calculando los valores de la constante K y de τ se tiene que:

$$\tau = R_{th}C = 5 \cdot 2 = 10[s]$$

$$K = \frac{V_{th}}{R_{th}C} = \frac{v(t)}{10 \cdot 2} = \frac{v(t)}{20}$$

$$A = v_C(0) - K\tau = 2V - 5 \cdot \frac{v(t)}{20} = 2V - \frac{v(t)}{4}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (5) se obtiene que:

$$v_C(t) = (2V - \frac{v(t)}{4})e^{-t/10} + \frac{v(t)}{2}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = 2e^{-t/10} + \frac{v(t)}{2} - \frac{v(t)e^{-t/10}}{4} \qquad (6)$$

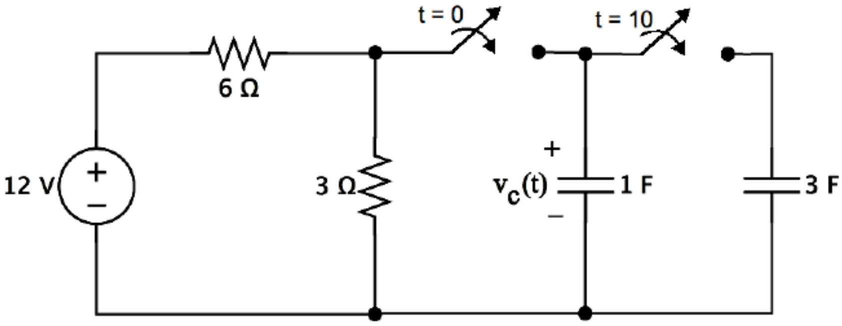
Sustituyendo los distintos valores dados para v(t) se obtiene finalmente que:

$$v_C(t) = 2u(t) + 2e^{-t/10} - u(t)e^{-t/10}$$

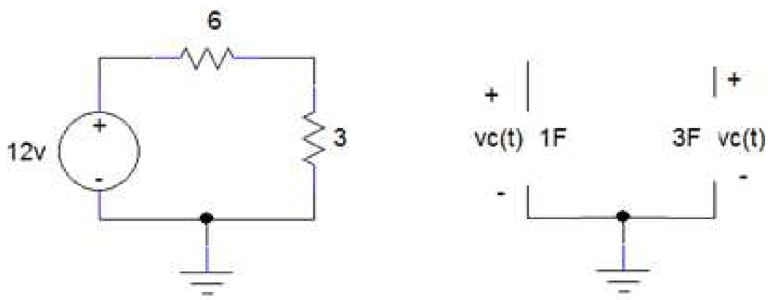
$$v_C(t) = 2e^{-t/10} + \frac{3r(t)}{2} - \frac{3r(t)e^{-t/10}}{4}$$

$$v_C(t) = 2e^{-t/10} + sen(2t) - \frac{sen(2t)e^{-t/10}}{2}$$

4) **La tensión Vc(0) en el condensador de 1F es de 1V, y el condensador de 3F está inicialmente descargado. Los interruptores están inicialmente abiertos y se cierran en los instantes indicados. Hallar Vc(t) para t>0 y las corrientes y voltajes del capacitor para t=0-, t=0+, t=10-, t=10+**

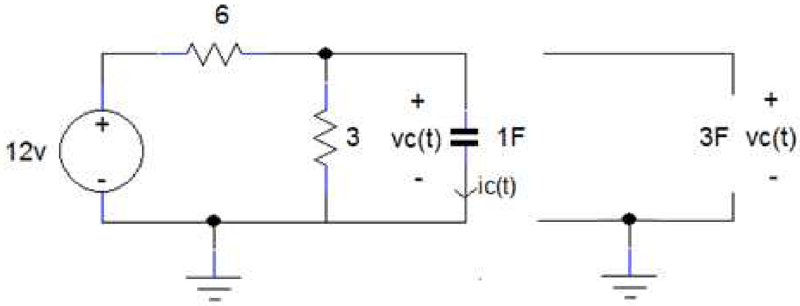


En t=0-

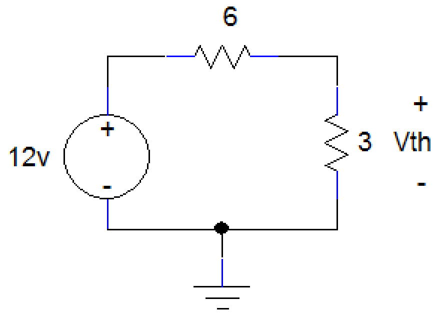


$$v_{C\_1F}(0^-) = 1V$$
$$i_{C\_1F}(0^-) = 0A$$
$$v_{C\_3F}(0^-) = 0V$$
$$i_{C\_3F}(0^-) = 0A$$

En t=0+:

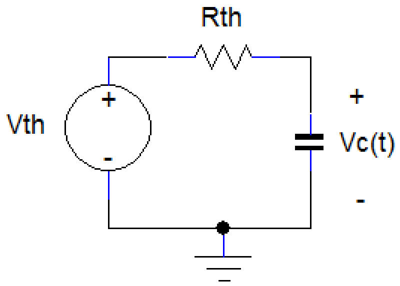


Buscando el circuito equivalente de Thèvenin:



$$V_{TH} = \frac{12 \cdot 3}{9} = 4V$$

$$R_{TH} = 6//3 = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2$$



$$v_C(t) = Ae^{-t/\tau} + K\tau \qquad (1)$$

$$K = \frac{V_{th}}{R_{th}C} = \frac{4}{2 \cdot 1F} = 2$$

$$\tau = R_{th}C = 2 \cdot 1F = 2s$$

$A = v_{C\_1F}(0) - K\tau = 1 - 4 = -3$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 1 se obtiene:

$$v_{C\_1F}(t) = 4 - 3e^{-t/2}$$

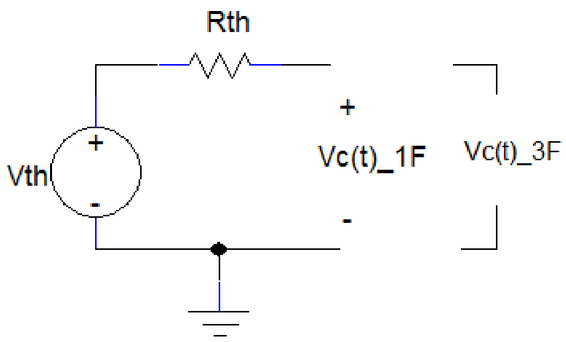
Buscando las condiciones correspondientes a t=0+

$$i_{C\_1F}(0^+) = \frac{Vth - v_{C\_1F}(0^+)}{Rth} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}A$$

Así obtenemos que:

$$v_{C\_1F}(0^+) = v_{C\_1F}(0^-) = 1V$$
$$i_{C\_1F}(0^+) = \frac{3}{2}A$$
$$v_{C\_3F}(0^+) = v_{C\_3F}(0^-) = 0V$$
$$i_{C\_3F}(0^+) = 0A$$

En t=10-:

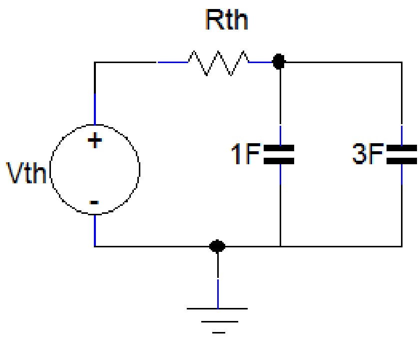


$$v_{C\_1F}(10^-) = 4 - 3e^{-t/2} = 4 - 3e^{-10/2} = 4 - 3e^{-5} = 3,979V \approx 4V$$

$$I_{C\_1F}(t) = C\frac{dV_{C\_1F}(t)}{dt} = \frac{3}{2}e^{-t/2}$$
$$I_{C\_1F}(10^-) = \frac{3}{2}e^{-5} = 0,0101A \approx 0A$$

$$v_{C\_1F}(10^-) = 4V$$
$$i_{C\_1F}(10^-) = 0A$$
$$v_{C\_3F}(10^-) = 0V$$
$$i_{C\_3F}(10^-) = 0A$$

En t=10+:



En esta situación obtenemos un circuito singular, debido a que la función que describe la corriente presenta una singularidad matemática.

La carga en t=10- para cada condensador está dada por

$$Q_{\_1F}(10^-) = C \cdot v_{1\_F}(10^-) = 1F \cdot 4V = 4[C] \quad (2)$$
$$Q_{\_3F}(10^-) = C \cdot v_{3\_F}(10^-) = 3F \cdot 0 = 0[C] \quad (3)$$

La carga total es:

$$Q_T(10^-) = Q_{1\_F}(10^-) + Q_{3\_F}(10^-) = 4[C] \quad (4)$$

En t=10+ por estar los capacitores en paralelo poseen el mismo voltaje, así que:

$$v_{C\_1F}(10^+) = v_{C\_3F}(10^+) \quad (5)$$

Debido al principio de conservación de la carga, al cerrar el interruptor la carga total debe mantenerse

$$Q_T(10^-) = Q_T(10^+) \quad (6)$$
$$Q_T(10^+) = 1F \cdot v_{1\_F}(10^+) + 3F \cdot v_{3\_F}(10^+) \quad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (7) se obtiene que:

$$Q_T(10^+) = 1F \cdot v_{1\_F}(10^+) + 3F \cdot v_{1\_F}(10^+) = 4F \cdot v_{1\_F}(10^+) \qquad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en (8) finalmente se obtiene que:

$4[C] = 4[F] \cdot v_{1\_F}(10^+) \Rightarrow v_{1\_F}(10^+) = 1V$

$$v_{C\_1F}(10^+) = 1V$$
$$v_{C\_3F}(10^+) = 1V$$

Ahora buscando la corriente en cada capacitor:

$$I_{C\_1F}(t) = C_{1F} \frac{dV_{C\_1F}(t)}{dt}$$
$$I_{C\_3F}(t) = C_{3F} \frac{dV_{C\_3F}(t)}{dt}$$

Pero sabemos que

$$V_{C\_T}(t) = V_{C\_1F}(t) = V_{C\_3F}(t)$$

Entonces basta con calcular el voltaje del condensador equivalente y evaluarlo en un tiempo 0 de este circuito que correspondería al tiempo t=10+ para el circuito original.

Si calculamos la ecuación diferencial nos da que:

$$V_{C\_T}(t) = \left(V_{C\_T}(0) - V_{TH}\right)e^{-t/R_{TH}\cdot(C_{1F}+C_{3F})} + V_{TH}$$
$$V_{C\_T}(t) = (1-4)e^{-t/2\cdot(1+3)} + 4 = -3e^{-t/8} + 4$$

Ahora sacamos la derivada

$$\frac{dV_{C\_T}(t)}{dt} = \frac{3}{8}e^{-t/8}$$

Y obtenemos las corrientes de cada condensador en el tiempo

$$I_{C\_1F}(t) = \frac{3}{8}e^{-t/8}$$
$$I_{C\_3F}(t) = \frac{9}{8}e^{-t/8}$$

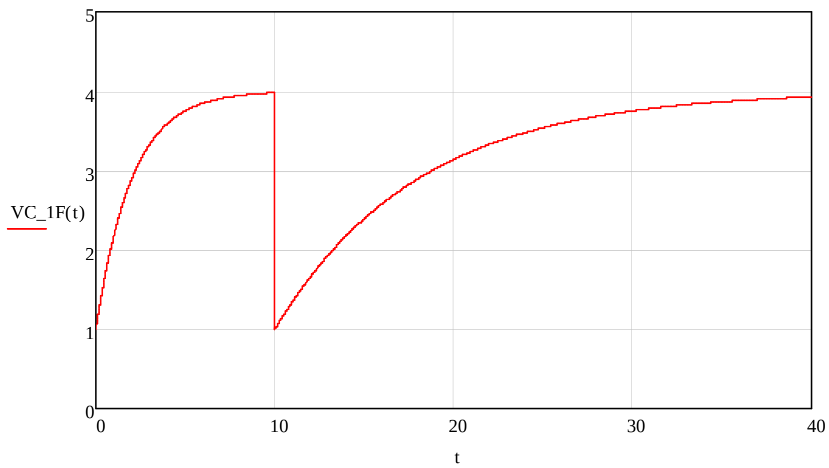
Ahora las evaluamos en t=0 que significaría el t=10+ del circuito principal

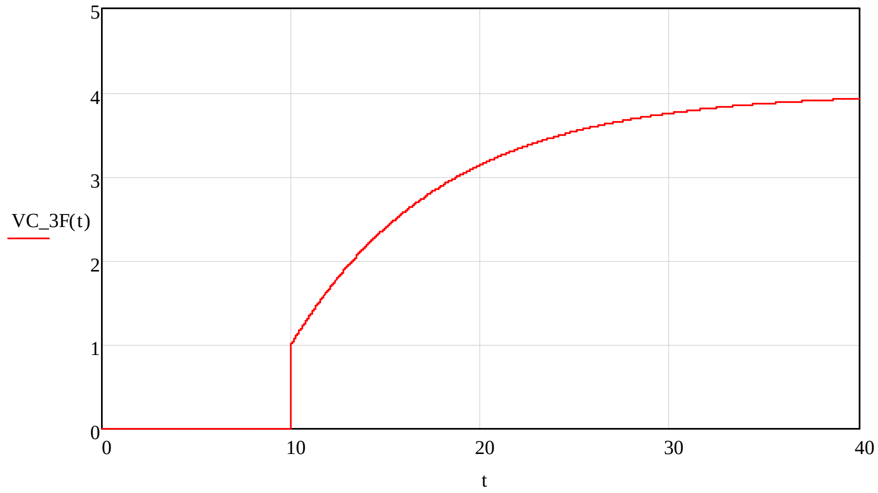
$$I_{C\_1F}(10^+) = \frac{3}{8}A$$
$$I_{C\_3F}(10^+) = \frac{9}{8}A$$

Finalmente el voltaje para t>0 en cada capacitor es:

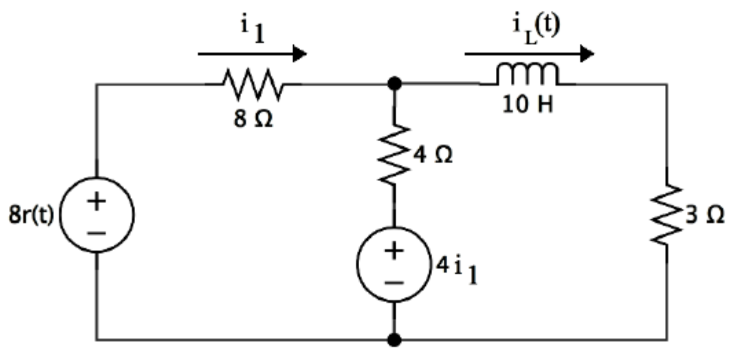
$$V_{C\_1F}(t) = \begin{cases} 4-3e^{-t/2} & 0<t<10 \\ 4-3e^{-(t-10)/8} & t>10 \end{cases}$$
$$V_{C\_3F}(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<10 \\ 4-3e^{-(t-10)/8} & t>10 \end{cases}$$

Si los graficamos tenemos que:

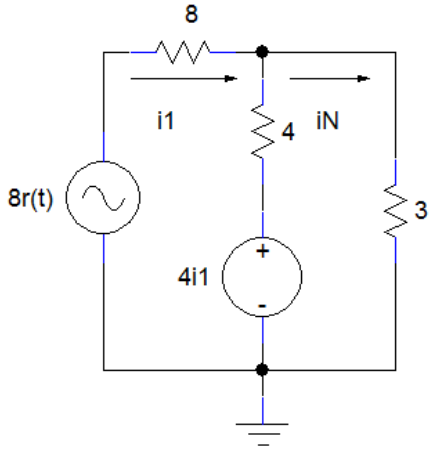




5) Hallar iL(t) e i1(t) para t>0



Buscando el equivalente de Norton



Malla 1:

$$-8r(t)+12i_1(t)-4i_N+4i_1=0 \Rightarrow -8r(t)+16i_1(t)-4i_N=0$$

$$4i_1(t)-i_N=2r(t) \qquad (1)$$

Malla 2:

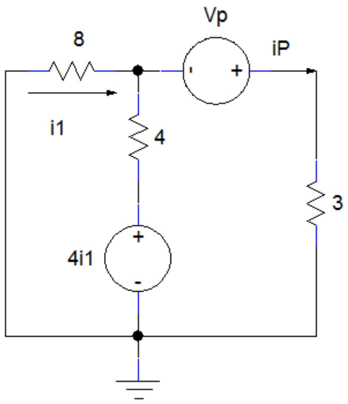
$$7i_N-4i_1(t)-4i_1(t)=0 \Rightarrow 7i_N-8i_1(t)=0$$

$$i_1(t)=\frac{7i_N}{8} \qquad (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) se obtiene que:

$$4\frac{7i_N}{8}-i_N=2r(t) \Rightarrow \frac{7i_N}{2}-i_N=2r(t) \Rightarrow 7i_N-2i_N=4r(t)$$

$$i_N=\frac{4r(t)}{5}$$



Malla 1:

$$12i_1(t)-4i_P+4i_1(t)=0 \Rightarrow 16i_1(t)-4i_P=0$$

$$i_1(t)=\frac{i_P}{4} \qquad (3)$$

Malla 2:

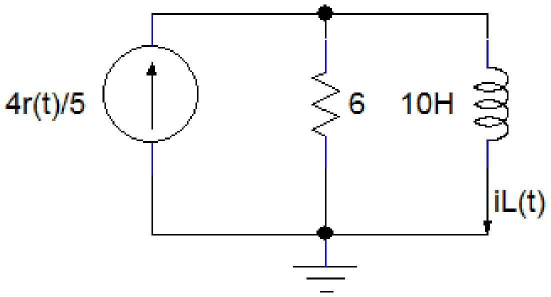
$$-V_P+7i_P-4i_1(t)=0 \Rightarrow 7i_P-4i_1(t)=V_P \qquad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (4) finalmente se obtiene:

$$7i_P - 4\frac{i_P}{4} = V_P \Rightarrow 6i_P = V_P$$

$$\frac{V_P}{I_P} = 6$$

Finalmente el equivalente de Norton obtenido es:



$$i_N = \frac{v_L(t)}{R_{TH}} + i_L(t)$$

Pero

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene que:

$$i_N = \frac{L}{R_{TH}} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \Rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{R_{TH} i_N}{L} - \frac{R_{TH} i_L(t)}{L}$$

$$K = \frac{R_{TH} i_N}{L}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}}$$

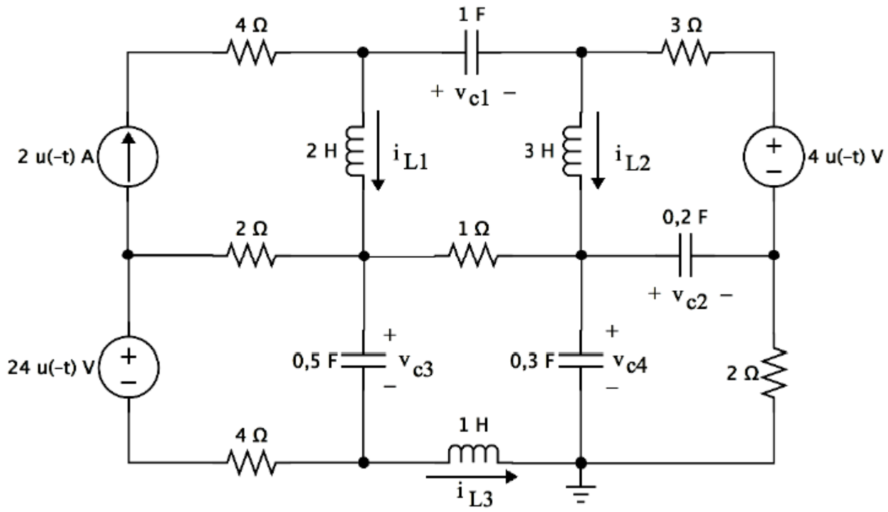
$$\frac{di_L(t)}{dt} = K - \frac{i_L(t)}{\tau} = \frac{K\tau - i_L(t)}{\tau}$$
$$\Rightarrow \frac{di_L(t)}{i_L(t) - K\tau} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int \frac{di_L(t)}{i_L(t) - K\tau} = -\int \frac{dt}{\tau}$$
$$\Rightarrow \ln(i_L(t) - K\tau) = -\frac{t}{\tau} + D$$
$$\Rightarrow i_L(t) - K\tau = e^{-t/\tau} e^D$$
$$A = e^D$$
$$i_L(t) = Ae^{-t/\tau} + K\tau$$
$$i_L(0) = A + K\tau \Rightarrow A = i_L(0) - K\tau$$
$$i_L(t) = (i_L(0) - K\tau)e^{-t/\tau} + K\tau$$

Calculando para el circuito:

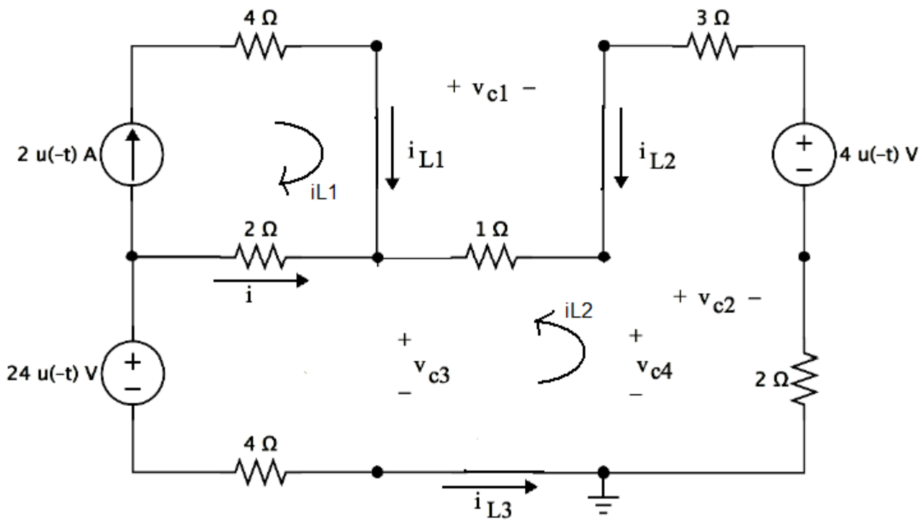
$$K = \frac{R_{TH} i_N}{L} = \frac{6 \cdot 4r(t)}{5 \cdot 10} = \frac{12r(t)}{25}$$
$$\tau = \frac{L}{R_{TH}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$i_L(t) = (0 - \frac{12r(t)}{25} \cdot \frac{5}{3})e^{-3t/5} + \frac{12r(t)}{25} \cdot \frac{5}{3} = -\frac{4}{5} r(t) e^{-3t/5} + \frac{4}{5} r(t)$$
$$i_L(t) = (1 - e^{-3t/5}) \frac{4}{5} r(t)$$

6) **El siguiente circuito ha permanecido mucho tiempo en la configuración mostrada. Halle las tensiones en los condensadores y las corrientes en los inductores en el instante t=0-.**



Después de mucho tiempo bajo la misma configuración, el circuito que se obtiene es:



$$i_{L1}(0^-) = 2u(-t) \tag{1}$$

$$v_{C1}(0^-) = -i_{L2}(0^-)\cdot 1 \tag{2}$$

$$i_{L3}(0^-) = i_{L2}(0^-) \tag{3}$$

$$v_{C2}(0^-) = 4u(-t) - 3i_{L2}(0^-) \tag{4}$$

$$v_{C4}(0^-) = 4u(-t) - 5i_{L2}(0^-) \quad (5)$$

$$v_{C3}(0^-) = -2i + 24u(-t) + 4i_{L2}(0^-) \quad (6)$$

Pero $i_{L1}(0^-) + i_{L2}(0^-) + i = 0 \Rightarrow i = -i_{L1}(0^-) - i_{L2}(0^-)$. Sustituyendo en la ecuación (6) se obtiene:

$$v_{C3}(0^-) = -2(-i_{L1}(0^-) - i_{L2}(0^-)) + 24u(-t) + 4i_{L2}(0^-)$$
$$\Rightarrow v_{C3}(0^-) = 2i_{L1}(0^-) + 2i_{L2}(0^-) + 24u(-t) + 4i_{L2}(0^-)$$

$$v_{C3}(0^-) = 2i_{L1}(0^-) + 6i_{L2}(0^-) + 24u(-t) \quad (7)$$

Recorriendo la malla 2:

$$10i_{L2}(0^-) - 4u(-t) + 24u(-t) - 2i = 0$$
$$\Rightarrow 10i_{L2}(0^-) + 20u(-t) - 2(-i_{L1}(0^-) - i_{L2}(0^-)) = 0$$
$$\Rightarrow 10i_{L2}(0^-) + 20u(-t) + 2i_{L1}(0^-) + 2i_{L2}(0^-) = 0$$
$$i_{L2}(0^-) = \frac{-10u(-t) - i_{L1}(0^-)}{6} \quad (8)$$

Sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación (8) se obtiene que:

$$i_{L2}(0^-) = \frac{-10u(-t) - 2u(-t)}{6} = -2u(-t)$$

Con este valor se pueden obtener todos los valores requeridos:

$v_{C1}(0^-) = -i_{L2}(0^-) \cdot 1 = 2u(-t)$

$v_{C2}(0^-) = 4u(-t) - 3i_{L2}(0^-) = 4u(-t) + 6u(-t) = 10u(-t)$

$v_{C3}(0^-) = 2i_{L1}(0^-) + 6i_{L2}(0^-) + 24u(-t) = 4u(-t) - 12u(-t) + 24u(-t) = 16u(-t)$

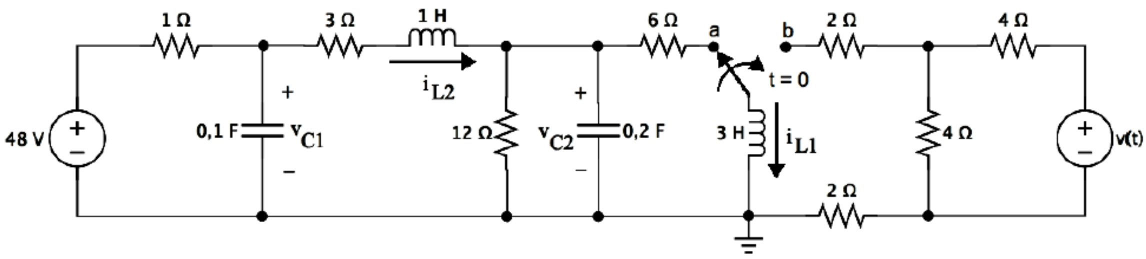
$v_{C4}(0^-) = 4u(-t) - 5i_{L2}(0^-) = 4u(-t) + 10u(-t) = 14u(-t)$

$i_{L3}(0^-) = i_{L2}(0^-) = -2u(-t)$

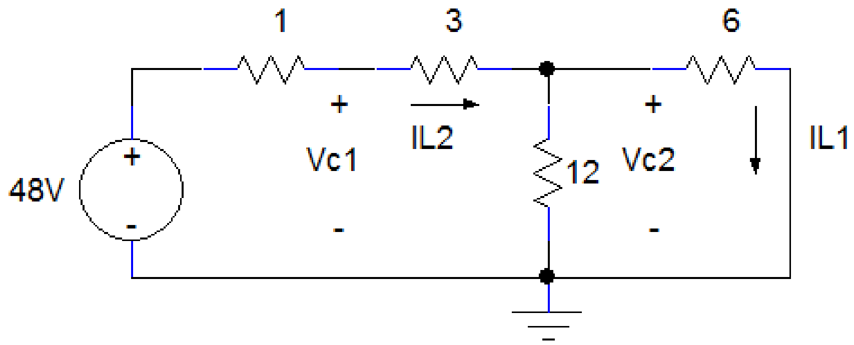
7) **En el circuito de la figura el interruptor pasa de la posición a a la b en el instante t-0.**

a) **Hallar las condiciones iniciales de vc1(0-), vc2(0-), iL1(0-), iL2(0-)**

b) **Hallar iL1(t) para t>0, sabiendo que v(t)=12u(t)-12u(t-3)V**



En t=0-



En la malla 1:

$$-48+16i_{L2}(0^-)-12i_{L1}(0^-)=0$$

$$4i_{L2}(0^-)-3i_{L1}(0^-)=12 \qquad (1)$$

En la malla 2:

$$18i_{L1}(0^-)-12i_{L2}(0^-)=0$$

$$3i_{L1}(0^-)-2i_{L2}(0^-)=0 \Rightarrow i_{L2}(0^-)=\frac{3i_{L1}(0^-)}{2} \qquad (2)$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) se obtiene que:

$$4\frac{3i_{L1}(0^-)}{2}-3i_{L1}(0^-)=12 \Rightarrow 6i_{L1}(0^-)-3i_{L1}(0^-)=12$$
$$\Rightarrow 3i_{L1}(0^-)=12$$

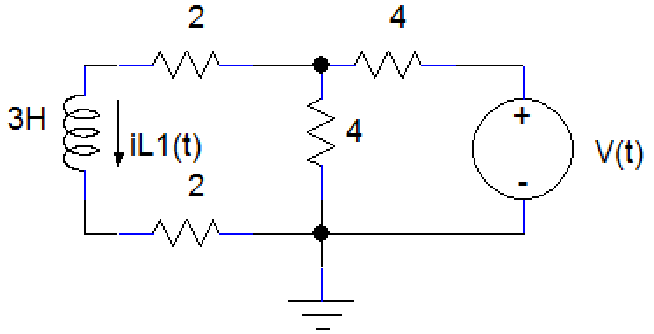
$$i_{L1}(0^-)=4A$$

$$i_{L2}(0^-)=\frac{3i_{L1}(0^-)}{2}=6A$$

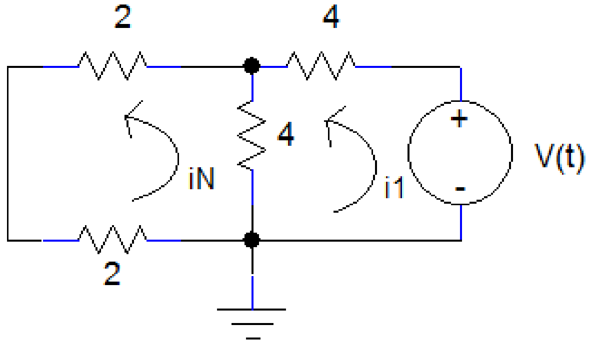
$$v_{C1}(0^-)=48-1i_{L2}(0^-)=48-6=42V$$

$$v_{C2}(0^-)=12(i_{L2}(0^-)-i_{L1}(0^-))=12(6-4)=24V$$

En t=0+, para la parte del circuito que nos interesa:



Buscando el equivalente de Norton:



Malla 1:

$$-v(t)+8i_1-4i_N=0 \tag{3}$$

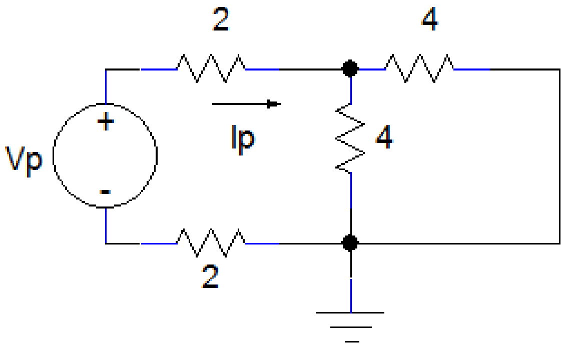
Malla 2:

$$8i_N-4i_1=0 \Rightarrow i_1=2i_N \tag{4}$$

Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (3) se obtiene:

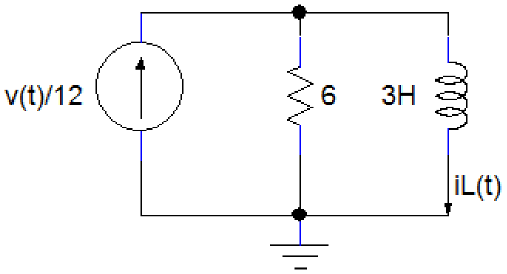
$$8\cdot 2i_N-4i_N=v(t) \Rightarrow i_N=\frac{v(t)}{12}$$

Buscando la Rth



$$Rth=(4//4)+2+2=6$$

El circuito equivalente es:



$$i_{L1}(t) = (i_{L1}(0) - K\tau)e^{-t/\tau} + K\tau$$

$$K = \frac{R_{TH} i_N}{L} = \frac{6 \cdot v(t)}{3 \cdot 12} = \frac{v(t)}{6}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{TH}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$i_{L1}(t) = (i_{L1}(0) - K\tau)e^{-t/\tau} + K\tau = (4 - \frac{v(t)}{6} \cdot \frac{1}{2})e^{-2t} + \frac{v(t)}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$i_{L1}(t) = (4 - \frac{v(t)}{12})e^{-2t} + \frac{v(t)}{12}$$

$$i_{L1}(t) = 4e^{-2t} + (1 - e^{-2t})\frac{v(t)}{12}$$

$$i_{L1}(t) = 4e^{-2t} + (1 - e^{-2t})\frac{12u(t) - 12u(t-3)}{12}$$

$$i_{L1}(t) = 4e^{-2t} + (1 - e^{-2t})[u(t) - u(t-3)]$$